به نام خدا

ساختمان های گسسته - روابط و توابع

Discrete Structures – Relations and Functions

مدرس : محمد امین‌زاده

www.sooraac.ir

روابط

❖ **تعریف ۱. یک رابطه (دودویی)** R **از مجموعه** X **به مجموعه** Y**، زیر مجموعه حاصل ضرب دکارتی** $X \times Y$ **است. اگر** $R \ni (x,y)$ **باشد، می نویسیم** $\boldsymbol{xRy}$ **و می گوییم** x **با** y **رابطه دارد.**

در حالتی که $X = Y$ **باشد،** R **را یک رابطه (دودویی) روی** X **می نامیم.**

- مجموعه دامنه R :

$$\{x \in X \mid (x,y) \in R \text{ for some } y \in Y\}$$

- مجموعه برد R :

$$\{y \in Y \mid (x,y) \in R \text{ for some } x \in X\}$$

- اگر یک **رابطه** به صورت **جدول** داده شده باشد **دامنه** آن از عضو های **ستون اول** و **برد** آن از عضو های **ستون دوم** تشکیل می شود.

❖ مثال ۱. برای جدول زیر یک رابطه R بنویسید.

Student	*Course*
Bill	*CompSci*
Mary	*Math*
Bill	*Art*
Beth	*History*
Beth	*CompSci*
Dave	*Math*

- جدول ۱ - رابطه R

➢ **مجموعه دامنه** R $(Student)$:

$$X = \{Bill, Mary, Beth, Dave\}$$

➢ **مجموعه برد** R $(Course)$:

$$Y = \{CompSci, Math, Art, History\}$$

➢ **رابطه** R **از جدول بالا می توان به صورت زیر نوشت :**

$$R = \{(Bill, CompSci), (Bill, Art). (Mary, Math), (Beth, History), (Beth, CompSci), (Dave, Math)\}$$

❖ مثال ۲. فرض کنید :

$$X = \{2,3,4\} \qquad and \qquad Y = \{3,4,5,6,7\}$$

اگر رابطه R را به این صورت تعریف کنیم که " $(x,y) \in R$ اگر x ، y را بشمارد ".

- رابطه R : $R = \{(2,4), (2,6). (3,3), (3,6), (4,4)\}$
- اگر رابطه R به صورت جدول بنویسیم داریم :

X	Y
2	4
2	6
3	3
3	6
4	4

▪ جدول ۲ - رابطه R

❖ **مثال ۳. فرض کنید R رابطه ای روی $X = \{1,2,3,4\}$ باشد که به صورت " $(x,y) \in R$ اگر $x \leq y$".**

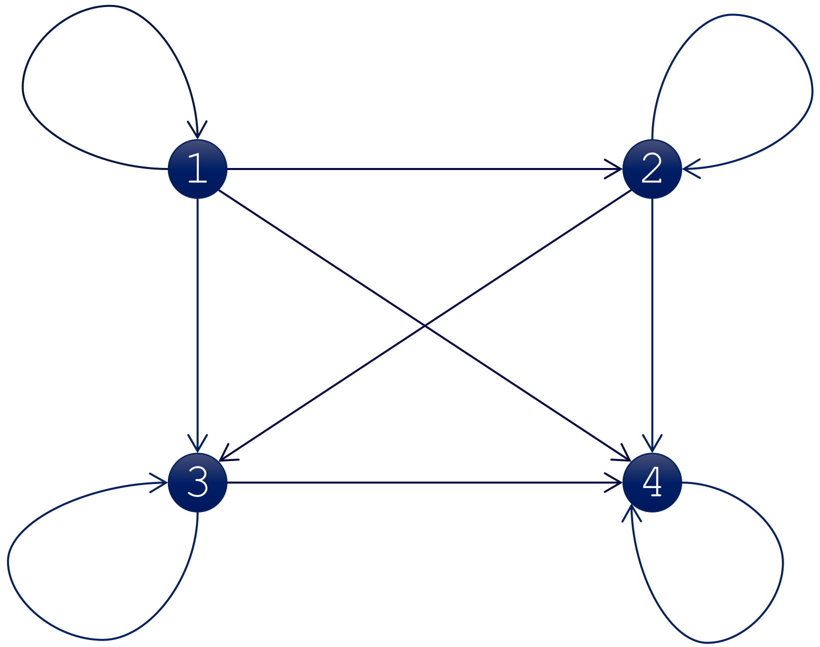
- **رابطه** R : $R = \{(1,1), (1,2). (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
- **دامنه** و **برد** هر دو ، برابر X هستند.

- یک روش مناسب برای تصویر کردن یک رابطه روی یک مجموعه ، رسم **گراف جهت دار** آن است.

❖ مثال ۴. گراف جهت دار رابطه مثال ۳ را رسم کنید.

- **رابطه** R : $R = \{(1,1), (1,2). (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

- **گراف جهت دار رابطه** R :

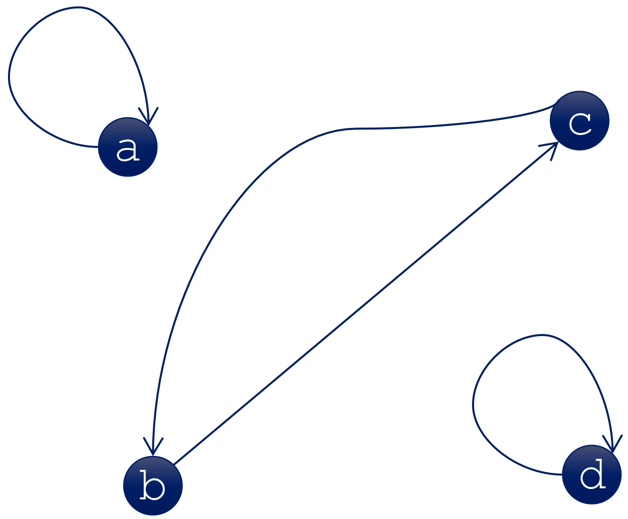


❖ مثال ۵. گراف جهت دار رابطه R روی $X = \{a,b,c,d\}$ به صورت زیر است.

- **رابطه** R :

$$R = \{(a, a), (b, c). (c, b), (d, d)\}$$

- **گراف جهت دار رابطه** R :



❖ مثال ۶. گراف جهت دارِ رابطه های زیر را رسم کنید.

الف) **رابطه** R : $R = \{(1,2),(2,1).(3,3),(1,1),(2,2)\} \quad on \quad X = \{1,2,3\}$

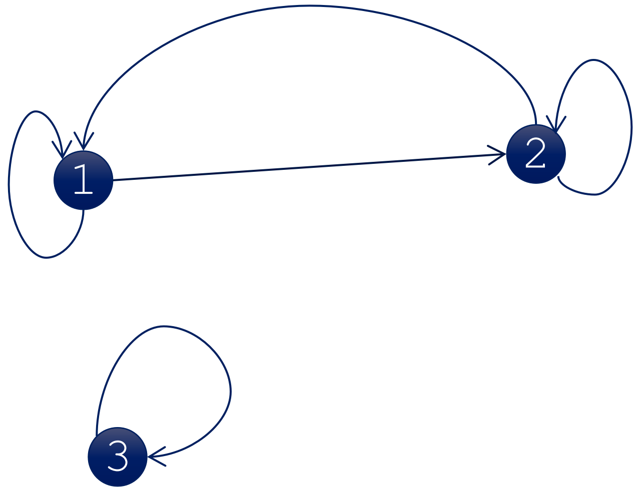
ب) **رابطه** R : $R = \{(1,2),(2,3).(3,4),(4,1)\} \quad on \quad X = \{1,2,3,4\}$

ج) **رابطه** R : **روی** $X = \{1,2,3,4\}$ **که به وسیله** $(x,y) \in R$، **اگر** $x^2 \geq y$ ، **تعریف می شود.**

❖ حل مثال ۶ :

الف-ج) **رابطه** R :

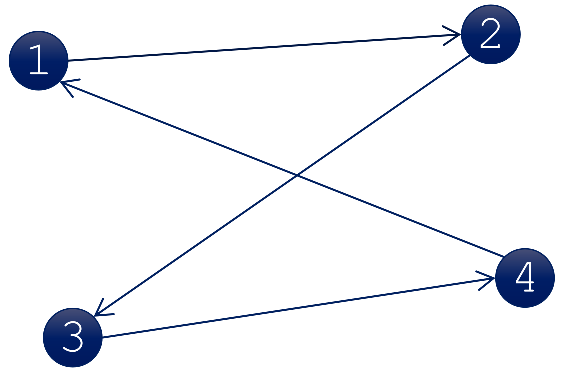
$$R = \{(1,2),(2,1).(3,3),(1,1),(2,2)\} \quad on \quad X = \{1,2,3\}$$



❖ حل مثال ۶ :

ب-ج) رابطه R :

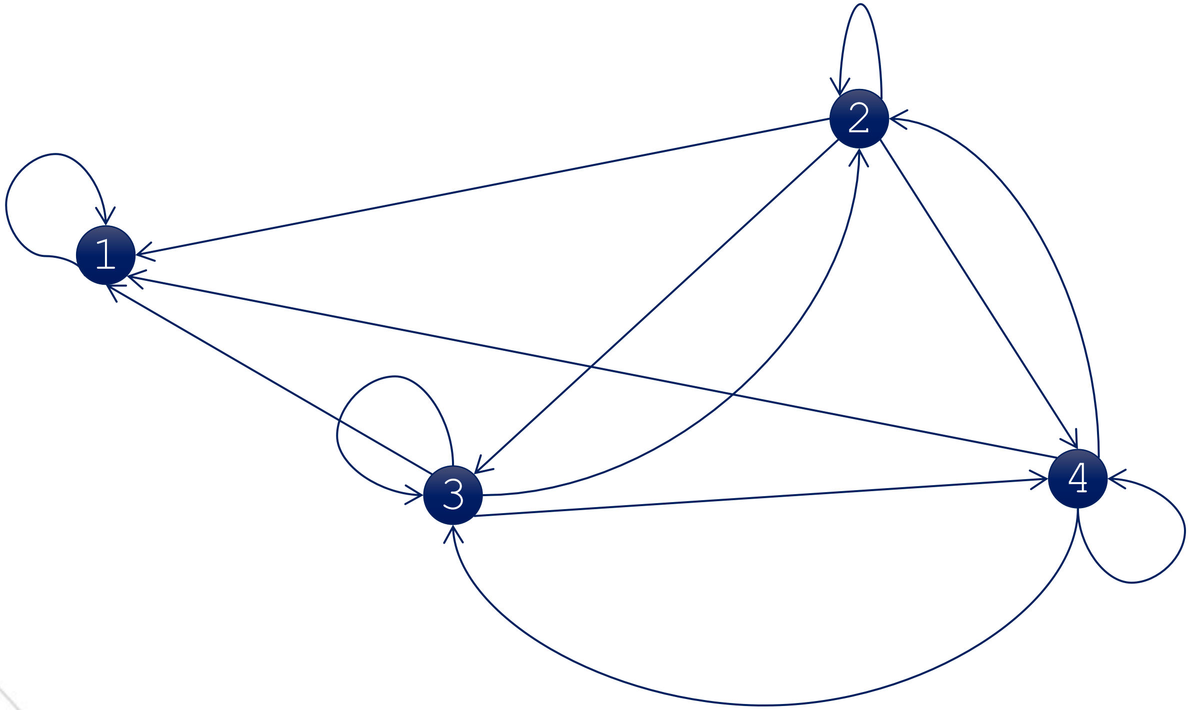
$R = \{(1,2),(2,3).(3,4),(4,1)\}$ on $X = \{1,2,3,4\}$



❖ حل مثال ۶ :

ج-ج) رابطه R : **روی** $X = \{1,2,3,4\}$ **که به وسیله** $(x,y) \in R$، **اگر** $x^2 \geq y$ ، **تعریف می شود.**

$R = \{(1, 1), (2,2). (3, 3), (4, 4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$



❖ **تعریف ۲.** رابطه R روی X ، **انعکاسی** است اگر برای هر $x \in X$، $(x,x) \in R$ باشد.

❖ **تعریف ۳.** رابطه R روی X، **متقارن** است اگر برای هر $x,y \in X$، اگر $(x,y) \in R$ آنگاه $(y,x) \in R$ باشد.

❖ **تعریف ۴.** رابطه R روی X، **پادمتقارن** است اگر برای هر $x,y \in X$، اگر $(x,y) \in R$ و $x \neq y$ آنگاه $(y,x) \notin R$ باشد.

❖ **تعریف ۵.** رابطه R روی X، **تعدی** است اگر برای هر $x,y,z \in X$، اگر $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ آنگاه $(x,z) \in R$ باشد.

❖ مثال ۷. رابطه هایی روی $X = \{1,2,3,4\}$ ارائه دهید که دارای خاصیت های زیر باشند.

الف) انعکاسی و متقارن باشند ولی متعدی نباشند.

ب) انعکاسی باشند اما متقارن و متعدی نباشند.

ج) انعکاسی و ضدمتقارن باشند ، ولی متعدی نباشند.

د) انعکاسی نباشند ، متقارن باشند ، ضدمتقارن نباشند ، متعدی باشد.

❖ حل مثال ۷ :

الف-ج) انعکاسی و متقارن باشند ولی متعدی نباشند.

$R = \{(1,1), (2,2). (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\} \quad on \quad X = \{1,2,3,4\}$

ب-ج) انعکاسی باشند اما متقارن و متعدی نباشند.

$R = \{(1,1), (2,2). (3,3), (4,4), (1,4), (4,3)\} \quad on \quad X = \{1,2,3,4\}$

ج-ج) انعکاسی و ضدمتقارن باشند ، ولی متعدی نباشند.

$R = \{(1,1), (2,2). (3,3), (4,4), (2,1), (1,3)\} \quad on \quad X = \{1,2,3,4\}$

د-ج) انعکاسی نباشند ، متقارن باشند ، ضدمتقارن نباشند ، متعدی باشد.

$R = \{(1,1). (2,2), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1)\} \quad on \quad X = \{1,2,3,4\}$

❖ **تعریف ۶.** رابطه R روی مجموعه X ، **ترتیب جزئی** است اگر R **انعکاسی** ، **ضدمتقارن** و **متعدی** باشد.

❖ **تعریف ۷.** فرض کنید R رابطه ای از X به Y باشد ، **معکوس** R که با $\boldsymbol{R^{-1}}$ نمایش داده می شود رابطه ای از Y به X است که به صورت زیر تعریف می شود :

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

❖ **مثال ۸.** معکوس رابطه R را بنویسید.

$$R = \{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}$$

$$R^{-1} = \{(4,2), (6,2), (3,3), (6,3), (4,4)\}$$

❖ تعریف ۸. فرض کنید R_1 رابطه ای از X به Y و R_2 رابطه ای از Y به Z باشد.
ترکیب R_1 و R_2 که با $\boldsymbol{R_2 \circ R_1}$ نمایش داده می شود رابطه ای از X به Z است که به صورت زیر تعریف می شود :

$$R_2 \circ R_1 = \{(x,z) \mid (x,y) \in R_1 \ and \ (y,z) \in R_2 \ for\ some\ \ y \in Y\}$$

❖ مثال ۹. ترکیب رابطه های R_1 و R_2 را بنویسید.

$$R_1 = \{(1,2),(1,6),(2,4),(3,4),(3,6),(3,8)\}$$

$$R_2 = \{(2,u),(4,s),(4,t),(6,t),(8,u)\}$$

$$R_2 \circ R_1 = \{(1,u),(1,t),(2,s),(2,t),(3,s),(3,t),(3,u)\}$$

❖ **تعریف ۹.** رابطه هایی که **انعکاسی** ، **متقارن** و **متعدی** هستند رابطه های **هم ارزی** نامیده می شوند.

❖ **مثال ۱۰.** تعیین کنید که آیا رابطه داده شده روی $\{1,2,3,4,5\}$ رابطه ای هم ارزی هستند یا خیر.

✓ $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1)\}$

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1), (3,4), (4,3)\}$

$R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

✓ $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,5), (5,1), (3,5), (5,3), (1,3), (3,1)\}$

❖ **تعریف ۱۰**. سطر های ماتریس را با عضو های X (ترتیبی دلخواه) و ستون های ماتریس را با عضو های Y (ترتیبی دلخواه) برچسب گذاری می کنیم.

آنگاه درایه سطر x و ستون y را برابر ۱ قرار می دهیم هر گاه xRy (x با y رابطه داشته باشد) و در غیر این صورت برابر ۰ قرار می دهیم.

این ماتریس ، **ماتریس رابطه** R (نسبت به ترتیب های X و Y) نامیده می شود.

❖ مثال ۱۱. ماتریس رابطه :

$$R = \{(1,b),(1,d),(2,c),(3,c),(3,b),(4,a)\}$$

را نسبت به ترتیب های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و a و b و c و d تعیین کنید.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

❖ مثال ۱۲. ماتریس رابطه :

$$R = \{(1,b),(1,d),(2,c),(3,c),(3,b),(4,a)\}$$

را نسبت به ترتیب های ۲ و ۳ و ۴ و ۱ و d و b و a و c تعیین کنید.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} d & b & a & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

❖ مثال ۱۳. ماتریس رابطه R که " xRy اگر x ، y را بشمارد " و از $\{2,3,4\}$ به $\{5,6,7,8\}$ تعریف شده است را نسبت به ترتیب های ۲ و ۳ و ۴ ، ۵ و ۶ و ۷ و ۸ تعیین کنید.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

هرگاه ماتریس R را روی مجموعه X (یعنی X به X) را بنویسیم از همان ترتیب سطر ها برای ستون ها استفاده می کنیم.

❖ مثال ۱۴. ماتریس رابطه

$$\mathrm{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(b,c),(c,b)\}$$

روی $\{a,b,c,d\}$ نسبت به ترتیب a و b و c و d را تعیین کنید.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

فرض کنید A ماتریس رابطه R باشد.

- **تعریف ۱۱**. رابطه R **انعکاسی** است اگر و فقط اگر تمام درایه های قطر اصلی ۱ باشد.

- **تعریف ۱۲**. رابطه R **متقارن** است اگر و فقط اگر تمام درایه های نسبت به قطر اصلی متقارن باشند.

- **تعریف ۱۳**. رابطه R **متعدی** است اگر و فقط اگر درایه i,j در A^2 مخالف صفر باشد و درایه i,j در A نیز مخالف صفر باشد.

❖ مثال ۱۵. ماتریس رابطه

$\mathrm{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(b,c),(c,b)\}$

روی $\{a,b,c,d\}$ **نسبت به ترتیب** a **و** b **و** c **و** d **عبارت است از :**

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

مربع آن عبارت است از :

$$A^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ملاحظه کنید که درایه i,j در A^2 مخالف صفر است و درایه i,j در A نیز مخالف صفر است بنابراین R **متعدی** است.

بانک اطلاعاتی رابطه ای

- **تعریف ۱۴.** " دو " در رابطه ی دوتاییِ (دودویی) R به این واقعیت اشاره می کند که هر گاه R را به صورت جدول بنویسیم ، R دارای **دو ستون** است. اغلب مفید است جدول با تعداد دلخواه ستون داشته باشیم. اگر جدولی ، n ستون داشته باشد به رابطه متناظر با آن **رابطه n تایی** می گویند.

❖ مثال ۱۶. جدول زیر یک **رابطه 4 تایی** را نشان می دهد.

این جدول ارتباط بین شماره شناسایی *ID Number* ، نام *Name* ، موقعیت *Position* و سن *Age* را بیان می کند.

ID Number	*Name*	*Position*	*Age*
22012	*Johnsonbaugh*	*c*	22
93831	*Glover*	*of*	24
58199	*Khajeian*	*p*	19
84341	*Ahamadi*	1*b*	42
01180	*Ebrahimi*	*p*	18

- جدول ۳ - رابطه *Player*

- **تعریف ۱۵. بانک اطلاعاتی (پایگاه داده ها)** ، جدولی از رکورد هاست که به وسیله کامپیوتر مورد پردازش قرار می گیرد.
  - مدل بانک اطلاعاتی رابطه ای ، وابسته به مفهومِ رابطه n تایی است.

- **تعریف** ۱۶. ستون های یک رابطه n تایی را **خصیصه** می نامند.

- **تعریف ۱۷. دامنه یک خصیصه** ، مجموعه ای از تمام عضو هایی است که آن خصیصه را دارند.

- **تعریف** ۱۸. اگر مقادیر خصیصه ها به صورت منحصر به فردی یک n تایی را تعریف کنند ، یک خصیصه یا ترکیبی از خصیصه های یک رابطه ، **کلید** نامیده می شود.

❖ **تعریف ۱۹. پرس و جو ، به معنای درخواست اطلاعات از بانک اطلاعاتی است.**

❖ **تعریف ۲۰. جبر رابطه ای ، یک زبان پرس و جو است که عملیات را بر روی بانک اطلاعاتی (پایگاه داده) به صورت فرمولی بیان می کند.**

- **عملگر های جبر رابطه ای** توسط نماد هایی نمایش داده می شوند.
- عملگر های جبر رابطه ای عبارتند از :

- $Selection\ :\ \sigma$
- $Projection\ :\ \pi$
- $Cartesian\ Product\ :\ \times$
- $Set\ Union\ :\ \cup$
- $Set\ Difference\ :\ -$
- $Rename\ :\ \rho$
- $Set\ Intersection\ :\ \cap$
- $Natural\ Join\ :\ \infty$

❖ **تعریف ۲۱. عملگر $Selection\ (\sigma)$ ، یک عملگر یکتایی است که سطر هایی از یک رابطه را انتخاب می کند.**

- فرم کلی : $\sigma_{condition}(R)$
- خروجی عملگر $Selection$ رابطه ای است که شامل سطر هایی از رابطه R می شود که شرط مورد نظر در آنها برقرار بوده است.
- شرط می تواند توسط علائم $=$ ، $>$ ، $<$ ، $\leq$ ، $\geq$ ، $\vee$ ، $\wedge$ ، $\sim$ ساخته شود.
- کاردینالیتی جدول حاصل کمتر یا مساوی جدول اولیه است اما درجه آنها تفاوتی ندارد.

❖ **تعریف ۲۲. عملگر $(\prod)$ $\boldsymbol{Projection}$ ، یک عملگر یکتایی است که ستون هایی از یک رابطه را انتخاب می کند.**

- فرم کلی : $\prod_{a_1,\dots,a_n}(R)$
- $a_1,\dots,a_n$ مجموعه اسامی خصیصه ها است که از رابطه R انتخاب می شوند.
- خروجی عملگر $Projection$ کلیه تاپل های رابطه R است که محدود به خصیصه های مشخص شده است.
- اگر در جدول سطر هایی شبیه هم باشند با هم ترکیب می شوند و سطر های تکراری حذف می شوند.
- کاردینالیتی حفظ می شود (معمولا یک کلید کاندید انتخاب می کنیم) اما درجه آنها کمتر یا مساوی جدول اولیه می باشد.

❖ **تعریف ۲۳. عملگر** $(\times)$ $\boldsymbol{Cartesian\ Product}$ ، یک عملگری است که روی دو جدول کار می کند و جدول جدیدی را می دهد که یک رکورد برای هر جفت رکورد ممکن از هر دو جدول دارد.

- فرم کلی : $R \times S$
- در جدول حاصل احتمال تکراری شدن ستون ها وجود دارد.
- کاردینالیتی جدول حاصل برابر حاصل ضرب کاردینالیتی دو جدول است و درجه جدول برابر با مجموع درجات دو جدول می باشد.

❖ تعریف ۲۴. عملگر $(\cup)$ $\boldsymbol{Set\ Union}$ ، یک عملگر دوتایی است که همانند اجتماع در تئوری مجموعه ها کار می کند.

- فرم کلی : $R \cup S$
- اجتماع دو رابطه R و S جدولی است که شامل کلیه تاپل های R و S می شود.
- دو رابطه ای که بر روی آنها عمل اجتماع انجام می شود باید همساز باشند ، یعنی دارای خصیصه های یکسان باشند.
- کاردینالیتی جدول حاصل برابر مجموع کاردینالیتی دو جدول منهای سطر های مشترک است و درجه جدول حفظ می شود.

❖ **تعریف ۲۵. عملگر $(\cap)$ $\boldsymbol{Set\ Intersection}$ ، یک عملگر دوتایی است که همانند اشتراک در تئوری مجموعه ها کار می کند.**

- فرم کلی : $R \cap S$
- اشتراک دو رابطه R و S جدولی است که شامل کلیه تاپل هایی می شود که در هر دو جدول وجود دارند.
- دو رابطه ای که بر روی آنها عمل اشتراک انجام می شود باید همساز باشند ، یعنی دارای خصیصه های یکسان باشند.
- کاردینالیتی جدول حاصل برابر سطر های مشترک دو جدول است و درجه جدول حفظ می شود.

❖ **تعریف ۲۶. عملگر** $(-)$ $Set\ Difference$ **، یک عملگر دوتایی است که همانند تفاضل در تئوری مجموعه ها کار می کند.**

- فرم کلی : $R - S$
- تفاضل دو رابطه R و S جدولی است که شامل کلیه تاپل هایی می شود که در جدول رابطه R است ولی در جدول رابطه S نیست.
- دو رابطه ای که بر روی آنها عمل تفاضل انجام می شود باید همساز باشند ، یعنی دارای خصیصه های یکسان باشند.
- کاردینالیتی حاصل جدول برابر کاردینالتی جدول رابطه R منهای سطر های مشترک است و درجه جدول حفظ می شود.

❖ **تعریف ۲۷. عملگر** $\boldsymbol{Rename}\ (\rho)$ **، یک عملگر یکتایی است که برای تغییر نام تخصیصه های جدول رابطه یا خود جدول رابطه مورد استفاده قرار می گیرد.**

- فرم کلی : $\rho_A(B)$

- خروجی عملگر $Rename$ روی رابطه B همان رابطه B است با نام جدید A ، به عبارت دیگر رابطه B به A تغییر نام می دهد.

❖ تعریف ۲۸. عملگر (∞) $\boldsymbol{Natural\ Join}$ ، یک عملگر دوتایی است.

- فرم کلی : $R \infty S$
- حاصل عملگر $Natural\ Join$ رابطه R بر رابطه S رابطه ای است که شامل تاپل هایی از R و S می شود که خصیصه های مشترک آنها برابر است.
- دو رابطه ای که در الحاق شرکت می کنند باید دارای خصیصه های مشترک باشند.

❖ مثال ۱۷. رابطه های زیر را در نظر بگیرید :

- $branch(branch\_name, branch\_city, assets)$
- $customer(customer\_name, customer\_street, customer\_city)$
- $account(account\_number, branch\_name, balance)$
- $loan(loan\_number, branch\_name, amount)$
- $depositor(customer\_name, account\_number)$
- $borrower(customer\_name, loan\_number)$

- شعبه(نام شعبه، شهر شعبه، دارایی‌ها)
- مشتری(نام مشتری، خیابان مشتری، شهر مشتری)
- حساب(شماره حساب، نام شعبه، موجودی)
- وام(شماره وام، نام شعبه، مبلغ)
- سپرده‌گذار(نام مشتری، شماره حساب)
- وام‌گیرنده(نام مشتری، شماره وام)

❖ مثال ۱۷. الف) شماره وام هایی که مقدارشان از ۲۰۰ دلار بیشتر است را بیابید.

- شعبه(نام شعبه، شهر شعبه، دارایی‌ها)
- مشتری(نام مشتری، خیابان مشتری، شهر مشتری)
- حساب(شماره حساب، نام شعبه، موجودی)
- وام(شماره وام، نام شعبه، مبلغ)
- سپرده‌گذار(نام مشتری، شماره حساب)
- وام‌گیرنده(نام مشتری، شماره وام)

- $branch(branch\_name, branch\_city, assets)$
- $customer(customer\_name, customer\_street, customer\_city)$
- $account(account\_number, branch\_name, balance)$
- $loan(loan\_number, branch\_name, amount)$
- $depositor(customer\_name, account\_number)$
- $borrower(customer\_name, loan\_number)$

- $\Pi_{loan\_number}(\sigma_{amount>200}(loan))$

❖ مثال ۱۷. ب) نام مشتریانی که یک وام ، یک حساب یا هر دو را دارند پیدا کنید.

- شعبه(نام شعبه، شهر شعبه، دارایی‌ها)
- مشتری(نام مشتری، خیابان مشتری، شهر مشتری)
- حساب(شماره حساب، نام شعبه، موجودی)
- وام(شماره وام، نام شعبه، مبلغ)
- سپرده‌گذار(نام مشتری، شماره حساب)
- وام‌گیرنده(نام مشتری، شماره وام)

- $branch(branch\_name, branch\_city, assets)$
- $customer(customer\_name, customer\_street, customer\_city)$
- $account(account\_number, branch\_name, balance)$
- $loan(loan\_number, branch\_name, amount)$
- $depositor(customer\_name, account\_number)$
- $borrower(customer\_name, loan\_number)$

- $\Pi_{customer\_name}(borrower) \cup \Pi_{customer\_name}(depositor)$

❖ مثال ۱۷. ج) نام مشتریانی که یک وام در شعبه مرکزی دارند را پیدا کنید.

- شعبه(نام شعبه، شهر شعبه، دارایی‌ها)
- مشتری(نام مشتری، خیابان مشتری، شهر مشتری)
- حساب(شماره حساب، نام شعبه، موجودی)
- وام(شماره وام، نام شعبه، مبلغ)
- سپرده‌گذار(نام مشتری، شماره حساب)
- وام‌گیرنده(نام مشتری، شماره وام)

- $branch(branch\_name, branch\_city, assets)$
- $customer(customer\_name, customer\_street, customer\_city)$
- $account(account\_number, branch\_name, balance)$
- $loan(loan\_number, branch\_name, amount)$
- $depositor(customer\_name, account\_number)$
- $borrower(customer\_name, loan\_number)$

- $\Pi_{customer\_name}(\sigma_{branch\_name=\text{"مرکزی"}}(borrower \infty loan))$

- اگر در رابطهٔ loan ستون branch_name وجود نداشته باشد، دیگر نمی‌توانیم بفهمیم هر وام مربوط به کدام شعبه است. بنابراین **پرس‌وجوی مسئله قابل حل نیست** چون اطلاعات لازم (نام شعبهٔ وام) در هیچ‌کدام از روابط داده نشده است.

❖ مثال ۱۷. د) نام مشتریانی که یا وام گرفته اند یا حساب دارند (ولی نه هر دو) را پیدا کنید.

- شعبه(نام شعبه، شهر شعبه، دارایی‌ها)
- مشتری(نام مشتری، خیابان مشتری، شهر مشتری)
- حساب(شماره حساب، نام شعبه، موجودی)
- وام(شماره وام، نام شعبه، مبلغ)
- سپرده‌گذار(نام مشتری، شماره حساب)
- وام‌گیرنده(نام مشتری، شماره وام)

- $branch(branch\_name, branch\_city, assets)$
- $customer(customer\_name, customer\_street, customer\_city)$
- $account(account\_number, branch\_name, balance)$
- $loan(loan\_number, branch\_name, amount)$
- $depositor(customer\_name, account\_number)$
- $borrower(customer\_name, loan\_number)$

❖ مثال ۱۷. د) نام مشتریانی که یا وام گرفته اند یا حساب دارند (ولی نه هر دو) را پیدا کنید.

مشتریانی که یا وام دارند یا حساب دارند ولی نه هر دو → یعنی XOR.

در جبر رابطه‌ای باید این‌طور بنویسیم:

$$\Pi_{customer\_name}(borrower) \cup \Pi_{customer\_name}(depositor) - \Pi_{customer\_name}(borrower) \cup \Pi_{customer\_name}(depositor)$$

مشتریانی که وام دارند → Π customer_name (borrower)

مشتریانی که حساب دارند → Π customer_name (depositor)

اجتماع (∪) → کسانی که حداقل یکی را دارند

اشتراک (∩) → کسانی که هر دو را دارند

تفاضل (−) → حذف کسانی که هر دو را دارند

❖ مثال ۱۷. ح) نام مشتریانی که وام در شعبه مرکزی دارند ولی هیچ حسابی در هیچ شعبه ندارند را پیدا کنید.

- شعبه(نام شعبه، شهر شعبه، دارایی‌ها)
- مشتری(نام مشتری، خیابان مشتری، شهر مشتری)
- حساب(شماره حساب، نام شعبه، موجودی)
- وام(شماره وام، نام شعبه، مبلغ)
- سپرده‌گذار(نام مشتری، شماره حساب)
- وام‌گیرنده(نام مشتری، شماره وام)

- $branch(branch\_name, branch\_city, assets)$
- $customer(customer\_name, customer\_street, customer\_city)$
- $account(account\_number, branch\_name, balance)$
- $loan(loan\_number, branch\_name, amount)$
- $depositor(customer\_name, account\_number)$
- $borrower(customer\_name, loan\_number)$

- $\Pi_{customer\_name}\left(\sigma_{branch\_name="\text{مرکزی}"}(borrower \infty loan)\right) - \Pi_{customer\_name}(depositor)$

در این عبارت ابتدا رابطه‌های borrower و loan با استفاده از عمل اتصال طبیعی (∞) به هم متصل می‌شوند تا مشخص شود هر مشتری چه وامی و در کدام شعبه دارد. سپس با عمل انتخاب σ فقط رکوردهایی نگه داشته می‌شوند که نام شعبه آن‌ها «مرکزی» باشد. بعد با عمل Π فقط نام مشتریان استخراج می‌شود؛ بنابراین در این مرحله نام مشتریانی را داریم که در شعبه مرکزی وام دارند. در ادامه، با عبارت $\Pi_{customer\_name}(depositor)$ نام تمام مشتریانی که دارای حساب بانکی هستند به‌دست می‌آید. در نهایت با عمل تفاضل (−)، مشتریانی که حساب دارند از مجموعه اول حذف می‌شوند و نتیجه نهایی شامل نام مشتریانی است که در شعبه مرکزی وام دارند ولی هیچ حسابی در هیچ شعبه‌ای ندارند.