به نام خدا

ساختمان های گسسته - منطق و اثبات ها

Discrete Structures – Logic and Proofs

مدرس : محمد امین زاده

www.sooraac.ir

کتاب : ساختمان‌های گسسته دکتر قلی زاده

بارم بندی:

۲ حضور غیاب

۴ تمرین

۶ میانترم

۱۰ پایان ترم

آیدی در پیام‌رسان‌های تلگرام، ایتا، بله : @soora_ac

گزاره ها

- **تعریف ۱**. در یک استدلال هر یک از عبارات استفاده شده براي رسیدن به نتیجه را **فرض** یا **مقدم** و عبارت آخر را **نتیجه** یا **تالی** می نامیم.
  - یک استدلال زمانی **معتبر** است که اگر فرضهاي آن **درست** باشد نتیجه نیز **درست** است.

- **تعریف ۲**. جملات یا راست هستند یا دروغ ولی هرگز نمیتوانند هم راست باشند هم دروغ. چنین جملاتی را **گزاره** می نامیم.
  - معمولا گزاره ها ، به صورت یک جمله اظهاری بیان می شوند (که در مقابل جملات پرسشی ، امری ، دستوری و غیره قرار دارد).
  - گزاره ها ، پایه و اساس هر نظریه ای در منطق هستند.

❖ مثال ۱ : کدام یک از جملات زیر **درست** یا **نادرست** است (همزمان نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد)

- $1 + 1 = 3.$
- در روز جمعه برای رفتن به تناتر شهر برای تماشای بینوایان ، دو بلیط بخر.
- زمین تنها سیاره منظومه شمسی است که حیات در آن جریان دارد.
- برای هر عدد صحیح مثبت n ، یک عدد اول بزرگتر از n وجود دارد.

❖ فرض کنید p و q گزاره باشند.

❖ **تعریف ۳. ترکیب عطفی** p و q به صورت $p \wedge q$ نمایش داده می شود گزاره زیر است :

$$p \quad and \quad q$$

❖ **تعریف ۴. ترکیب فصلی** p و q به صورت $p \vee q$ نمایش داده می شود گزاره زیر است :

$$p \quad or \quad q$$

➢ گزاره هایی مانند $p \wedge q$ و $p \vee q$ که از ترکیب این گزاره ها به دست می آیند گزاره مرکب نام دارند.

❖ مثال ۲ : اگر

- p : $1+7=3$.
- q : یک دهه ، صد سال است.

دو گزاره باشند ، آنگاه **ترکیب عطفی** p و q به صورت زیر است :

$p \wedge q$: $1+7=3$ و یک دهه ، صد سال است.

ترکیب فصلی p و q به صورت زیر است :

$p \vee q$: $1+7=3$ یا یک دهه ، صد سال است.

❖ **تعریف ۴.** ارزش درستی گزاره هایی مانند ترکیب های **عطفی** و **فصلی** را می توان با جدولی توصیف کرد که **جدول درستی** نام دارد.

❖ **تعریف ۵.** ارزش درستی گزاره مرکب $p \wedge q$ به صورت **جدول درستی** زیر تعریف می شود :

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

❖ تعریف ۶. ارزش درستی گزاره مرکب $p \vee q$ به صورت جدول درستی زیر تعریف می شود :

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

❖ تعریف ۷. نقیض p که به صورت نمایش $\bar{p}$ داده می شود گزاره زیر است :

$$not \quad p$$

❖ تعریف ۸. ارزش درستی گزاره $\bar{p}$ به صورت جدول درستی زیر تعریف می شود :

$\boldsymbol{p}$	$\bar{p}$
T	F
F	T

❖ مثال ۳ : اگر

➢ p : ۴ ، یک عدد اول است.

آنگاه نقیض p به صورت گزاره زیر است :

$\bar{p}$: چنین نیست که ۴ ، یک عدد اول است.

یا می توان نوشت : $\bar{p}$: ۴ ، یک عدد اول نیست.

❖ مثال ۴ : اگر

- p : بلز پاسکال ، چندین ماشین حسابِ مختلف اختراع کرد.
- q : اولین کامپیوترِ تمام الکترونیکی در قرن بیستم ساخته شد.
- r : عدد π در سال ۱۹۵۴ تا ۱۰۰۰۰۰۰ رقمِ بعد از اعشار محاسبه شد.

گزاره های بالا را می توان به صورت **مرکب** زیر بیان کرد :

« بلز پاسکال، چندین ماشین حسابِ مختلف اختراع کرد **و چنین نیست که** اولین کامپیوترِ تمام الکترونیکی در قرن بیستم شناخته شد **یا** عدد π در سال ۱۹۵۴ تا ۱۰۰۰۰۰۰ رقمِ بعد از اعشار محاسبه شد ».

گزاره مرکب بالا به صورت نمادی به صورت زیر می باشد :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee r$$

گزاره های شرطی و هم ارزی منطقی

❖ **تعریف ۹.** فرض کنید p و q گزاره باشند ، گزاره مرکب **اگر** p **آنگاه** q **گزاره شرطی** نامیده می شود و آن را به صورت $p \to q$ نمایش می دهند.

- گزاره p را **فرض(مقدم)** و گزاره q را **نتیجه(تالی)** می گویند.
- فرض **شرط کافی** و نتیجه **شرط لازم** را بیان می کنند.
- گزاره $q \to p$ **عکسِ گزاره** $p \to q$ می نامیم.

❖ تعریف ۱۰. ارزش درستی گزاره های مرکب $p \to q$ و $q \to p$ به صورت جدول درستی زیر تعریف می شود :

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$q \to p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

❖ تعریف ۱۱. فرض کنید p و q گزاره باشند ، گزاره مرکب p اگر و فقط اگر q گزاره دو شرطی نامیده می شود و آن را به صورت $p \leftrightarrow q$ نمایش می دهند.

- صورت دیگر بیان "p اگر و فقط اگر q" چنین است که "p شرط لازم و کافی برای q است".

❖ تعریف ۱۲. ارزش درستی گزاره مرکب $p \leftrightarrow q$ به صورت جدول درستی زیر تعریف می شود :

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

❖ خواص گزاره ها

- جابه جایی : $p \wedge q \equiv q \wedge p \quad , \quad p \vee q \equiv q \vee p$
- شرکت پذیری : $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad , \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- توزیع پذیری : $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \quad , \quad (p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
- قانون دمورگان : $\overline{(p \wedge q)} \equiv \bar{p} \vee \bar{q} \quad , \quad \overline{(p \vee q)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$
- جذبی : $p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad , \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- خود توانی : $p \wedge p \equiv p \quad , \quad p \vee p \equiv p$
- همانی : $p \vee F \equiv p \quad , \quad p \wedge T \equiv p$
- متمم : $p \vee \bar{p} \equiv T \quad , \quad p \wedge \bar{p} \equiv F$
- نقیض دوگانه : $\bar{\bar{p}} \equiv p$

❖ مثال ۵ : گزاره های زیر مفروض اند :

- p : «گزاره q دروغ است».
- q : «گزاره p درست است».

آیا گزاره p درست است؟ چرا؟

$$p = \neg q$$
$$q = p$$

با جایگذاری $q = p$ در رابطهٔ اول:

$$p = \neg p$$

این رابطه در منطق کلاسیک ممکن نیست؛ زیرا یک گزاره نمی‌تواند همزمان با نقیض خود برابر باشد.

نتیجه:

هیچ ارزش سازگاری برای p و q وجود ندارد؛ بنابراین این دو گزاره به تناقض می‌رسند و نمی‌توان گفت p درست است.

❖ مثال ۶ : کدام یک از عبارات زیر ، گزاره و کدام یک گزاره نیستند

- جمعیت ایران ، ۸۰ میلیون نفر است.
- در نیمکره شمالی ، تیرماه در فصل زمستان قرار دارد.
- فیل ها ، حیوانات باهوشی هستند.
- x بزرگ تر از y است.
- خداحافظ آرش!

❖ مثال ۷ : گزاره های زیر را در نظر بگیرید :

- p : «یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است».
- q : «یک کلمه دارای ۲ بایت است».
- r : «یک بیت مساوی صفر یا یک است».

گزاره های نمادین زیر را به زبان فارسی نوشته و راست یا دروغ بودن هر کدام را مشخص کنید.

الف) $p \wedge q$ ب) $p \vee q$ ج) $\bar{p}$ د) $\overline{p \wedge q}$

ه) $\bar{p} \wedge \bar{q}$ و) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\,\overline{(p \wedge r)}\,]$

❖ حل مثال ۷ :

- p : «یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است».
- q : «یک کلمه دارای ۲ بایت است».
- r : «یک بیت مساوی صفر یا یک است».

الف) $p \vee q$

الف-ج) یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است **یا** یک کلمه دارای ۲ بایت است.

ارزش گزاره p و q نادرست است .

بنابراین ارزش گزاره $p \vee q$ نادرست است.

❖ حل مثال ۷ :

- p : «یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است».
- q : «یک کلمه دارای ۲ بایت است».
- r : «یک بیت مساوی صفر یا یک است».

ب) $p \wedge q$

ب-ج) یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است **و** یک کلمه دارای ۲ بایت است.

ارزش گزاره p و q نادرست است .

بنابراین ارزش گزاره $p \wedge q$ نادرست است.

❖ حل مثال ۷ :

- p : «یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است».
- q : «یک کلمه دارای ۲ بایت است».
- r : «یک بیت مساوی صفر یا یک است».

ج) $\bar{p}$

ج-ج) چنین نیست که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است.

ارزش گزاره p نادرست است.

بنابراین ارزش گزاره $\bar{p}$ درست است.

❖ حل مثال ۷ :

- p : «یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است».
- q : «یک کلمه دارای ۲ بایت است».
- r : «یک بیت مساوی صفر یا یک است».

د) $\overline{p \wedge q}$

د-ج) **چنین نیست** که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است **و** یک کلمه دارای ۲ بایت است.

ارزش گزاره p و q نادرست است .

بنابراین ارزش $\overline{p \wedge q}$ درست است.

❖ حل مثال ۷ :

- p : «یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است».
- q : «یک کلمه دارای ۲ بایت است».
- r : «یک بیت مساوی صفر یا یک است».

ه) $\bar{p} \wedge \bar{q}$

د-ج) **چنین نیست** که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است **و چنین نیست** یک کلمه دارای ۲ بایت است.

ارزش گزاره p و q نادرست است ، پس ارزش گزاره $\bar{p}$ و $\bar{q}$ درست است

بنابراین ارزش $\bar{p} \wedge \bar{q}$ درست است.

❖ حل مثال ۷ :

- p : ((یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است)).
- q : ((یک کلمه دارای ۲ بایت است)).
- r : ((یک بیت مساوی صفر یا یک است)).

و) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\,\overline{(p \wedge r)}\,]$

و-ج) یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است **و** یک کلمه دارای ۲ بایت است **یا** یک بیت مساوی صفر یا یک است ، **اما در عین حال** ، **چنین نیست** که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است **و** یک بیت مساوی صفر یا یک باشد.

ارزش گزاره p و q نادرست و ارزش گزاره r درست است ، پس ارزش گزاره $[(p \wedge q) \vee r]$ درست است و چون ارزش گزاره $p \wedge r$ نادرست است پس ارزش گزاره $[\,\overline{(p \wedge r)}\,]$ درست است.

بنابراین ارزش $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\,\overline{(p \wedge r)}\,]$ درست است.

❖ مثال ۸ : جدول درستی گزاره های زیر را تشکیل دهید.

الف) $\bar{p} \wedge q$ 		ب) $p \vee \bar{q}$ 		ج) $[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge [\bar{p} \vee \bar{r}]$

❖ حل مثال ۸ :

الف) $\bar{p} \wedge q$

الف-ج)

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

❖ حل مثال ۸ :

ب) $p \vee \bar{q}$

ب-ج)

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\bar{q}}$	$\boldsymbol{p \vee \bar{q}}$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

❖ حل مثال ۸ :

ج) $[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge [\bar{p} \vee \bar{r}]$

ج-ج)

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{r}$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	$\bar{p} \vee \bar{r}$	$[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge [\bar{p} \vee \bar{r}]$
T	T	T	F	F	T	T	T	F	F
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	F	T	F

❖ مثال ۹ : کدام یک از گزاره های زیر ، راستگو است؟

الف) $(\overline{p \wedge q}) \vee (\bar{p} \vee \bar{q})$

ب) $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$

الف-ج)

$$(\overline{\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}}) \vee (\bar{\boldsymbol{p}} \vee \bar{\boldsymbol{q}}) \equiv (\bar{\boldsymbol{p}} \vee \bar{\boldsymbol{q}}) \vee (\bar{\boldsymbol{p}} \vee \bar{\boldsymbol{q}}) \equiv (\bar{\boldsymbol{p}} \vee \bar{\boldsymbol{q}}) \equiv (\overline{\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}})$$

بنابراین گزاره الف راستگو نیست

ب-ج)

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \equiv \big(\boldsymbol{p} \vee (\bar{p} \wedge q)\big) \wedge \big(\bar{q} \vee (\bar{p} \wedge q)\big) \equiv \big((p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee q)\big) \wedge \big((\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{q} \vee q)\big)$$

$$\equiv \big(T \wedge (p \vee q)\big) \wedge \big((\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge T\big) \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \equiv (p \vee q) \wedge (\overline{\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}})$$

بنابراین گزاره ب راستگو نیست

❖ مثال ۱۰ : کدام یک از عبارات زیر ، هم ارز هستند؟

الف) $q \wedge p$ و $p \wedge q$

ب) $p \vee (q \vee r)$ و $(p \vee q) \vee r$

ج) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ و $p \wedge (q \vee r)$

د) $p \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee r$

ه) $p \vee (q \wedge r)$ و $(p \vee q) \wedge r$

و) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ و $p \vee (q \wedge r)$

ذ) $\bar{p} \wedge \bar{q}$ و $\overline{(p \vee q)}$

ح) $p \vee \overline{(q \wedge r)}$ و $(p \vee \bar{q}) \vee \bar{r}$

❖ حل مثال ۱۰ :

الف) $q \wedge p$ و $p \wedge q$

الف-ج)

با توجه به خاصیت جابه جایی :

$$\boldsymbol{p \wedge q \equiv q \wedge p}$$

ب) $p \vee (q \vee r)$ و $(p \vee q) \vee r$

ب-ج)

با توجه به خاصیت شرکت پذیری :

$$\boldsymbol{(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)}$$

❖ حل مثال ۱۰ :

ج) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ و $p \wedge (q \vee r)$

ج-ج)

با توجه به خاصیت توزیع پذیری :

$$\boldsymbol{p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$$

د) $p \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee r$

د-ج)

با توجه به جدول درستی دو گزاره ، این دو گزاره هم ارز نیستند.

❖ حل مثال ۱۰ :

هـ) $p \vee (q \wedge r)$ و $(p \vee q) \wedge r$

هـ-ج)

با توجه به جدول درستی دو گزاره ، این دو گزاره هم ارز نیستند.

و) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ و $p \vee (q \wedge r)$

و-ج)

با توجه به خاصیت توزیع پذیری :

$$\boldsymbol{p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$$

❖ حل مثال ۱۰ :

ذ) $\bar{p} \wedge \bar{q}$ و $\overline{(p \vee q)}$

ذ-ج)

با توجه به قانون دمورگان :

$$\overline{(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})} \equiv \bar{\boldsymbol{p}} \wedge \bar{\boldsymbol{q}}$$

ح) $p \vee \overline{(q \wedge r)}$ و $(p \vee \bar{q}) \vee \bar{r}$

ح-ج)

با توجه به قانون دمورگان :

$$\boldsymbol{p} \vee \overline{(\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})} \equiv \boldsymbol{p} \vee (\bar{\boldsymbol{q}} \vee \bar{\boldsymbol{r}})$$

با توجه به خاصیت شرکت پذیری :

$$\boldsymbol{p} \vee (\bar{\boldsymbol{q}} \vee \bar{\boldsymbol{r}}) \equiv (\boldsymbol{p} \vee \bar{\boldsymbol{q}}) \vee \bar{\boldsymbol{r}}$$

❖ مثال ۱۱ : نشان دهید $p \rightarrow q$ هم ارز با گزاره های زیر است.

الف) $\bar{p} \vee q$ ب) $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ ج) $\overline{(p \wedge \bar{q})}$

الف-ج)

با توجه به جدول درستی :

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

❖ حل مثال ۱۱ :

ب) $\bar{q} \to \bar{p}$

ب-ج)

با توجه به جدول درستی :

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \to \bar{p}$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

❖ حل مثال ۱۱ :

ج) $\overline{(p \wedge \bar{q})}$

ج-ج)

با توجه به قانون دمورگان :

$$\overline{(\boldsymbol{p} \wedge \overline{\boldsymbol{q}})} \equiv \overline{\boldsymbol{p}} \vee \boldsymbol{q}$$

و توجه به اینکه در قسمت (الف) :

$$\overline{\boldsymbol{p}} \vee \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$$

بنابراین :

$$\overline{(\boldsymbol{p} \wedge \overline{\boldsymbol{q}})} \equiv \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$$

❖ مثال ۱۲ : در هر یک از عبارات زیر مقدم و تالی را مشخص کنید.

الف) برای رئیس جمهور شدن کافی است یک سیاستمدار بود.

ب) برای رئیس جمهور شدن لازم است یک سیاستمدار بود.

ج) شرط لازم برای درک علوم کامپیوتر ، داشتن دانش کافی در ریاضیات گسسته است.

د) این برنامه اجرا خواهد شد ، تنها اگر ، اشتباهی در تایپ کردن آن وجود نداشته باشد.

الف-ج) مقدم : سیاستمدار بودن ، تالی : رئیس جمهور بودن

ب-ج) مقدم : رئیس جمهور بودن ، تالی : سیاستمدار بودن

ج-ج) مقدم : درک علوم کامپیوتر ، تالی : داشتن دانش کافی در ریاضیات گسسته

د-ج) مقدم : این برنامه اجرا خواهد شد ، تالی : اشتباهی در تایپ کردن آن وجود نداشته باشد

❖ مثال ۱۳ : جدول درستی هر یک از گزاره های زیر را تشکیل دهید.

الف) $[(p \to q) \wedge p] \to q$

ب) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

ج) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

د) $(p \wedge \bar{p}) \to q$

❖ حل مثال ۱۳ :

الف) $[(p \to q) \land p] \to q$

الف-ج)

p	q	$(p \to q)$	$[(p \to q) \land p]$	$[(p \to q) \land p] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

❖ حل مثال ۱۳ :

ب) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

ب-ج)

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

❖ حل مثال ۱۳ :

ج) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

ج-ج)

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	F

❖ حل مثال ۱۳ :

د) $(p \wedge \bar{p}) \rightarrow q$

د-ج)

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$	$(p \wedge \bar{p}) \rightarrow q$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

❖ مثال ۱۴ : با استفاده از گزاره های دوشرطی ، مشخص کنید که کدام یک از زوج گزاره های زیر هم ارز هستند.

الف) $(p \wedge \bar{q}) \to r$ و $(p \to q) \to r$

ب) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee r$

ج) $\bar{p} \to \bar{q}$ و $p \leftrightarrow q$

د) $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$ و $p \leftrightarrow q$

❖ حل مثال ۱۴ :

الف) $(p \wedge \bar{q}) \to r$ و $(p \to q) \to r$

الف-ج)

با توجه به جدول درستی گزاره دو شرطی $[(p \to q) \to r] \leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \to r]$:

p	q	r	$\bar{q}$	$p \to q$	$[(p \to q) \to r]$	$p \wedge \bar{q}$	$[(p \wedge \bar{q}) \to r]$	$[(p \to q) \to r] \leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \to r]$
T	T	T	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F	T	F

بنابراین دو گزاره بالا هم ارز نیستند.

❖ حل مثال ۱۴ :

ب) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee r$

ب-ج)

با توجه به جدول درستی گزاره دو شرطی $[(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$:

p	q	r	$p \wedge q$	$[(p \wedge q) \vee r]$	$(p \vee r)$	$(q \vee r)$	$[(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$	$[(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

بنابراین دو گزاره بالا هم ارز هستند. $[(p \wedge q) \vee r] \equiv [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

❖ حل مثال ۱۴ :

ج) $\bar{p} \to \bar{q}$ و $p \leftrightarrow q$

ج-ج)

با توجه به جدول درستی گزاره دو شرطی $[p \leftrightarrow q] \leftrightarrow [\bar{p} \to \bar{q}]$:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \leftrightarrow q$	$\bar{p} \to \bar{q}$	$[p \leftrightarrow q] \leftrightarrow [\bar{p} \to \bar{q}]$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

بنابراین دو گزاره بالا هم ارز نیستند.

❖ حل مثال ۱۴ :

د) $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$ و $p \leftrightarrow q$

د-ج)

با توجه به جدول درستی گزاره دو شرطی $[p \leftrightarrow q] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})]$:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$[(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})]$	$[p \leftrightarrow q] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})]$
T	T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T

بنابراین دو گزاره بالا هم ارز هستند. $[p \leftrightarrow q] \equiv [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})]$

گزاره نماها و سورها

❖ **تعریف** ۱۴. **گزاره نما** عبارتی است که اگر مقادیر متغیرهاي به کار رفته در آن مشخص شود به **گزاره** تبدیل شود.

- مجموعه مقاديري كه ميتواند جايگزين يک متغير موجود در گزاره نما شود **جهان** ناميده مى شود.

❖ **تعریف** ۱۵. **دو گزاره نما را هم ارز گوییم** ، هر گاه به ازاي كليه ي مقادير ممكن از متغيرهايشان ارزش درستی یکسان داشته باشند.

❖ مثال ۱۵ : عبارت ریاضی زیر ، همه گزاره نما هستند.

- $x + 4 = 3$
- مجموع اولین n عدد فرد ، مساوی n^2 است
- اگر $x < 3$ ، آنگاه ، $x^2 = -1$.
- $x + y = 4$
- اگر $x < y$ ، آنگاه ، $x^2 < y^2$.
- $x + y = 4$ اگر و تنها اگر ، $y = 4 - x$

❖ **تعریف ۱۵.** فرض کنید P ، یک تابع گزاره ای با جهان سخن D است. جمله :

برای هر ، $P(x)$

یک جمله با **سور عمومی** نامیده می شود.

- نماد $\forall$ به **معنای هر** و **سور عمومی** نامیده می شود.

❖ **تعریف ۱۶.** فرض کنید Q ، یک تابع گزاره ای با جهان سخن D است. جمله :

برای یک ، $Q(x)$

یک جمله با **سور وجودی** نامیده می شود.

- نماد $\exists$ به **معنای برای یک** و **سور وجودی** نامیده می شود.

❖ مثال ۱۶ : جمله

برای هر عدد حقیقی ، $x^2 \geq 0$

- جمله ای با سور عمومی است. جهان سخن آن مجموعه اعداد حقیقی است. این جمله برای هر حقیقی x ، درست است. علاوه بر این به خاطر مثبت یا صفر بودنِ مربع x ، درست است.

❖ مثال ۱۷ : جمله

برای یک عدد حقیقی ، $\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5}$

- جمله ای با سور وجودی است. جهان سخن آن مجموعه اعداد حقیقی است. این جمله برای $x = 2$ ، درست است.

❖ **تعریف ۱۷. اگر دست کم برای یک در جهان سخن ، جمله با سور عمومی زیر**

برای هر ، $P(x)$

نادرست باشد ، $P(x)$ نادرست است. مقداری از x در جهان سخن که را $P(x)$ نادرست می سازد، **مثال نقض** نامیده می شود.

❖ مثال ۱۸ : جمله با سور عمومی

برای هر عدد حقیقی x ، $x^2 - 1 > 0$

- جمله ای با سور عمومی بالا نادرست است. زیرا اگر $x = \mathbf{1}$ آنگاه گزاره $1^2 - 1 > 0$ نادرست است. مقدار ۱ برای جمله بالا یک **مثال نقص** نامیده می شود.

❖ مثال ۱۹ : نشان دهید جمله با سور وجودی زیر نادرست است.

برای یک عدد حقیقی x، $\frac{1}{x^2+1} > 1$

➢ برای این که نشان دهیم جمله بالا نادرست است باید نشان دهیم که :

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

برای هر عدد حقیقی x نادرست است. اکنون عبارت بالا درست وقتی نادرست است که :

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

درست است. اکنون باید نشان دهیم عبارت بالا به برای هر عدد حقیقی x درست است.

❖ ادامه حل مثال ۱۹ :

- برای این منظور فرض کنید x یک عدد حقیقی دلخواه باشد. از آنجا که $x^2 \geq 0$ است. می توانیم ۱ را به دو طرف این نامساوی اضافه کنیم تا $x^2 + 1 \geq 1$ به دست آید. اگر دو طرفِ نامساوی اخیر را بر $x^2 + 1$ تقسیم کنیم ، به دست می آید :

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

که برای هر عدد حقیقی x درست است. بنابراین جمله

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

که برای هر عدد حقیقی x نادرست است.

- نشان دادیم که جمله با سور وجودی

برای یک عدد حقیقی x، $\frac{1}{x^2+1} > 1$

نادرست است.

❖ مثال ۲۰ : فرض کنید $P(x,y)$ جمله :

اگر $x^2 < y^2$ ، آنگاه $x < y$

باشد. جهان سخن ، مجموعه اعداد حقیقی است.

- جمله :

برای هر x ، برای هر y ، $P(x,y)$

نادرست است. یک مثال نقض $x = 1$ ، $y = -2$ است. در این حالت ، گزاره نادرست زیر به دست می آید :

اگر $(-2)^2 < 1^2$ ، آنگاه $-2 < 1$

❖ **مثال ۲۱ :** فرض کنید $L(x,y)$ تابع گزاره ای "x ، y **را دوست دارد**" باشد.
حوزه سخن ، **مجموعه تمام انسان ها** است.هر یک از گزاره های زیر را به صورت نمادی بنویسید. کدام یک از گزاره ها ، درست هستند؟

- یک نفر ، همه را دوست دارد. — $\exists x\ \forall y\ L(x,y)$
- همه ، همه را دوست دارند. — $\forall x\ \forall y\ L(x,y)$
- یک نفر ، یک نفر را دوست دارد. — $\exists x\ \exists y\ L(x,y)$
- همه ، یک نفر را دوست دارند. — $\forall x\ \exists y\ L(x,y)$

❖ مثال ۲۲ : نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

- $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$
- $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$
- $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$
- $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$

- $\exists x\ \exists y\ \overline{P(x,y)}$
- $\exists x\ \forall y\ \overline{P(x,y)}$
- $\forall x\ \exists y\ \overline{P(x,y)}$
- $\forall x\ \forall y\ \overline{P(x,y)}$

❖ قوانین مربوط به اثبات درستی یا نادرستیِ جملات دارای **سور عمومی** و **وجودی**

- برای اثبات این که جمله با **سور عمومی** :

برای هر x ، $P(x)$

درست است نشان می دهیم که برای هر x در جهان سخن ، گزاره $P(x)$ **درست** است.

نشان دادنِ درستی $P(x)$ برای یک **مقدار خاص** x ، ثابت نمی کند که :

برای هر x ، $P(x)$

درست است.

❖ قوانین مربوط به اثبات درستی یا نادرستیِ جملات دارای **سور عمومی و وجودی**

- برای اثبات این که جمله با **سور وجودی** :

برای یک x ، $P(x)$

درست است یک مقدار x در جهان سخن بدست آورید که برای آن گزاره $P(x)$ **درست** است.

- برای اثبات این که جمله با **سور عمومی** :

برای هر x ، $P(x)$

نادرست است یک مقدار x در جهان سخن بدست آورید که برای آن گزاره $P(x)$ **نادرست** است.

❖ قوانین مربوط به اثبات درستی یا نادرستیِ جملات دارای سور عمومی و وجودی

➢ برای اثبات این که جمله با **سور وجودی** :

برای یک x ، $P(x)$

نادرست است نشان می دهیم که برای هر x در جهان سخن ، گزاره $P(x)$ **نادرست** است.

نشان دادنِ نادرستی $P(x)$ برای یک **مقدار خاص** x ، ثابت نمی کند که :

برای یک x ، $P(x)$

نادرست است.

روش های اثبات

❖ **تعریف ۱۸. برهان مستقیم** از نتیجه ترکیب منطقی اصل ها، تعریف ها و تئوری های پیشین بدست می آید.

❖ **تعریف ۱۹. اثبات استقرایی** ابتدا یک «حالت پایه» اثبات می شود، و سپس به کمک «فرض استقرا» مجموعه‌ای از حالات بعدی اثبات می شود.

فرض کنید $P(n)$ گزاره نمایی باشد که در آن جهان مورد بحث مجموعه اعداد طبیعی است.

معمولا سه مرحله در این اثبات وجود دارد : (فرض کنید n_0 (مبنای استقرا) ، می تواند هر عدد صحیح مثبت غیر صفر باشد.)

- **مبنای استقرا.** نشان می دهیم که $P(n_0)$ راست است.
- **فرض استقرا.** فرض می کنیم که برای هر $k \geq n_0$ ، $P(k)$ راست است.
- **مرحله استقرا.** با استفاده از فرض استقرا ، نشان می دهیم که $P(k+1)$ نیز راست است.

- **تعریف ۲۰**. در اثبات با **برهان خلف**، فرض می کنیم گزاره‌ای غلط است، سپس به یک تناقض منطقی می رسیم، پس نتیجه می گیریم که آن گزاره باید صحیح باشد.

  - اثبات از طریق برهان خلف یکی از متداول ترین روش های اثبات در ریاضی است.

❖ مثال ۲۳ : حاصل ضرب عددی فرد در عددی زوج ، عددی زوج است.

اثبات از طریق **برهان مستقیم** :

- فرض می کنیم که x عددی زوج و y عددی فرد است ، بنابراین $x = 2k$ و $y = 2k' + 1$.

$$x.y = (2k).(2k' + 1) = 2\underbrace{(kk' + k)}_{m} = 2m$$

عبارت بالا نشان می دهد حاصل ضرب عددی زوج است.

❖ مثال ۲۴ : $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات از طریق **برهان خلف** :

- فرض می کنیم که $\sqrt{2}$ گویا است ، پس $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ، که a و b بدون عامل مشترک هستند ، بنابراین $a = \sqrt{2}b$ یا $a^2 = 2b^2$
- می دانیم b^2 یک عدد مثبت حقیقی است ، $2b^2$ یک عدد زوج است بنابراین $\boldsymbol{a}$ **زوج** است.
- به طور مشابه می توان نشان داد که $\boldsymbol{b}$ **زوج** است.
- اگر a و b هر دو **زوج** باشند، **مضربی مشترک** خواهند داشت ، که با **فرض** ما در **تناقض** است

بنابراین $\sqrt{2}$ گنگ است.

❖ مثال ۲۵ : نشان دهید مجموع اولین n عدد فرد برابر n^2 است.

اثبات از طریق استقرای ریاضی :

- فرض می کنیم که $S(n)$ این مجموع باشد. در این صورت

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

- بدیهی است که $S(1) = 1 = 1^2$. بنابراین، مجموع فوق برای حالت $n_0 = 1$ صحیح است.
- فرض کنید مجموع فوق برای $n = k$ صحیح است ، به عبارت دیگر :

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

❖ ادامه حل مثال ۲۶ :

- حال نشان می دهیم که این مجموع برای $k+1$ نیز صحیح است.

به عبارت دیگر نشان می دهیم که $S(k+1) = (k+1)^2$.

$$S(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + (2k+1) = S(k) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$